

**Тема:** Розв'язування типових вправ. Самостійна робота.

**Мета:**

- *Навчальна:* закріпити знання учнів за темами «Визначений інтеграл, площа криволінійної трапеції та площі фігур обмежених даними лініями»
- *Розвиваюча:* продовжувати формувати та розвивати навички учнів розв'язувати математичні задачі та застосовувати отримані знання;
- *Виховна:* виховувати наполегливість, вміння правильно планувати особистий час на виконання завдання;

**Компетенції:**

- *Математична компетентність:*
  - *Уміння:* оперувати числовою інформацією, розв'язувати задачі математичного змісту, інтерпретувати та оцінювати результати; прогнозувати в контексті навчальних та практичних задач
  - *Ставлення:* усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві
  - *Навчальні ресурси:* розв'язування математичних задач;

**Тип уроку:** закріплення знань та вмінь;

**Обладнання:** опорний конспект, навчальна презентація, картки із завданнями та розв'язками самостійної роботи, мультимедійне обладнання;

## Хід уроку

### I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

### II. Актуалізація опорних знань

- Як можна обчислити площу криволінійної трапеції?  
( $S = F(b) - F(a)$ , де  $F$  будь-яка первісна функції  $f$  на проміжку  $[a; b]$ )
- Що ми називаємо визначеним інтегралом?  
Нехай  $F$  – первісна функції  $f$  на проміжку  $I$ , числа  $a$  і  $b$  ( $a < b$ ), належать проміжку  $I$ . Різницю  $F(b) - F(a)$  називають **визначеним інтегралом** функції  $f$  на проміжку  $[a; b]$



- Як обчислити визначений інтеграл?

1. Знайти будь-яку первісну  $F$  функції  $f$  на проміжку  $[a; b]$ ;
2. Обчислити значення первісної  $F$  у точках  $x = b$  і  $x = a$ ;
3. Знайти різницю  $F(b) - F(a)$ ;

Виконуючи обчислення визначених інтегралів зручно використовувати такий запис:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

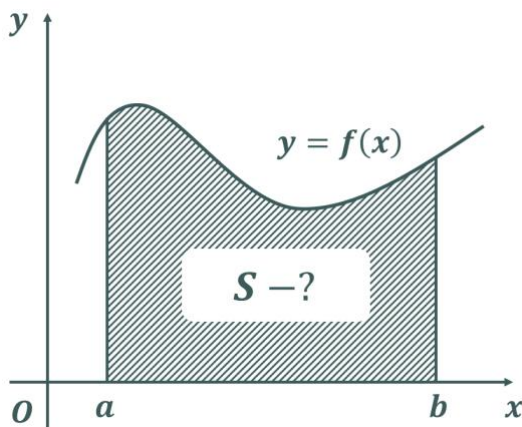
- Чи можна виносити сталий множник за знак інтеграла?

(Так, сталий множник можна виносити за знак інтеграла)

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

- Яка формула виражає геометричний зміст визначеного інтеграла?

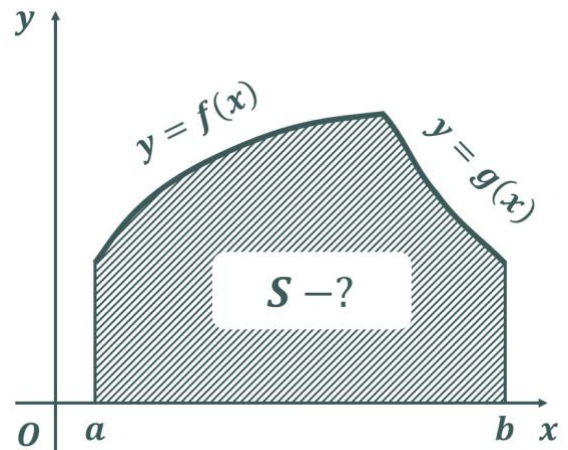
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

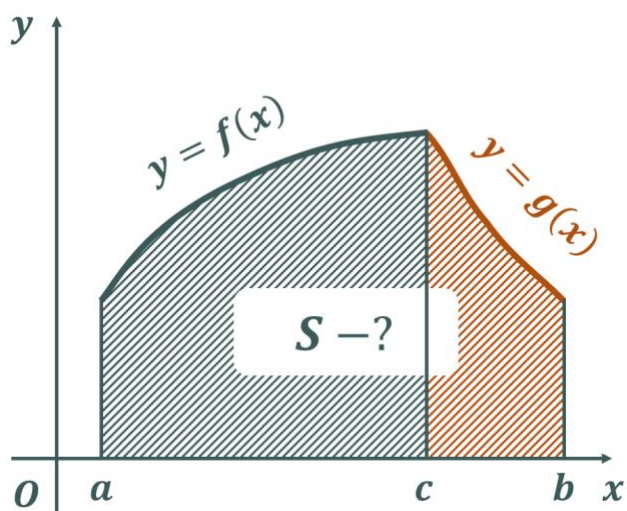
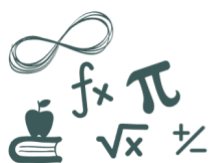


- За якою формулою можемо знайти площу криволінійної трапеції?

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Як можемо знайти площу цієї фігури?

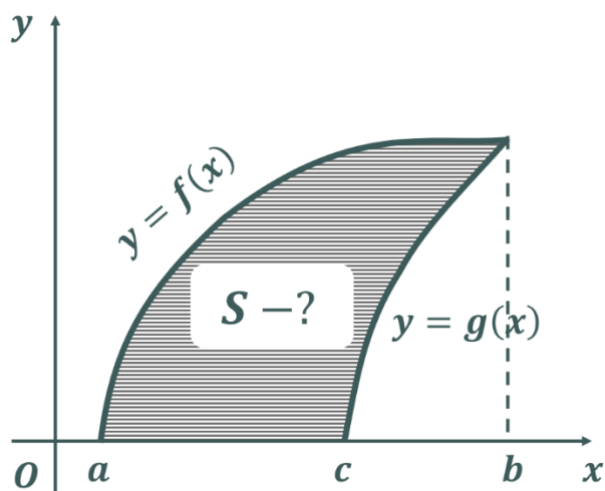




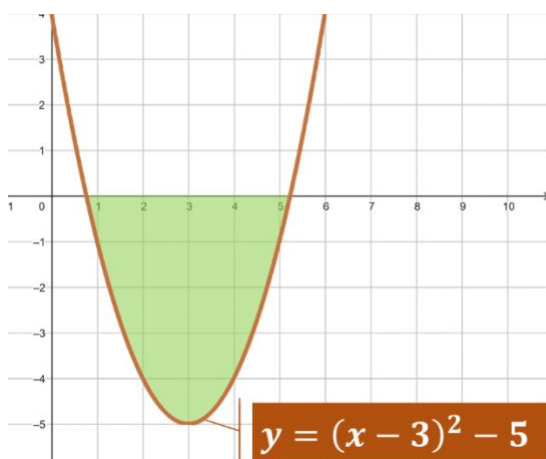
$$S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

- За якою формулою можемо знайти площу цієї фігури?

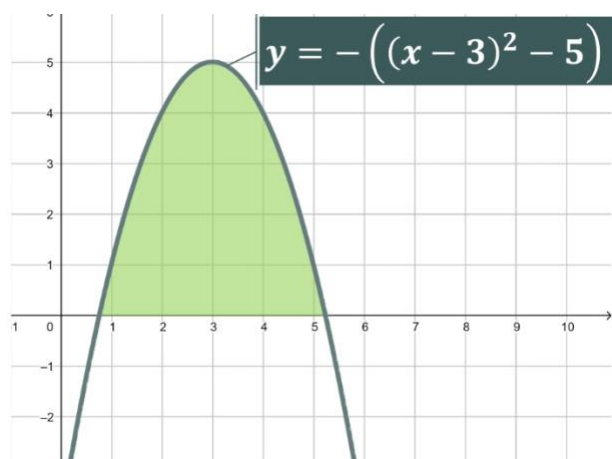
$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b g(x)dx$$



- Чи будуть ці площі рівними?



(Так)



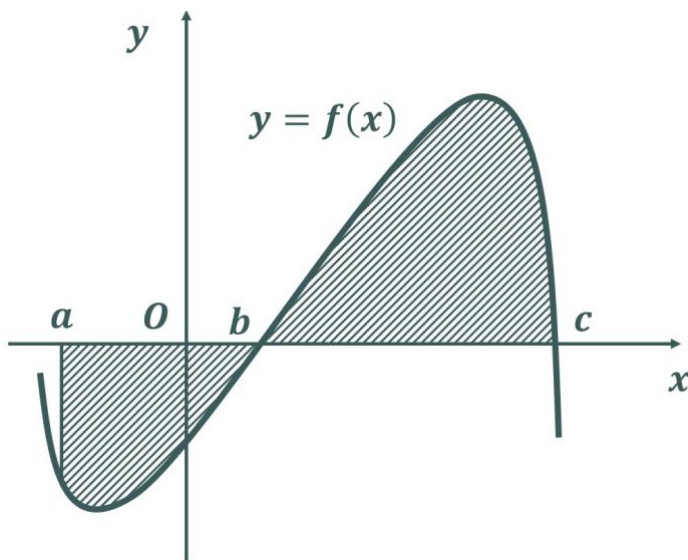
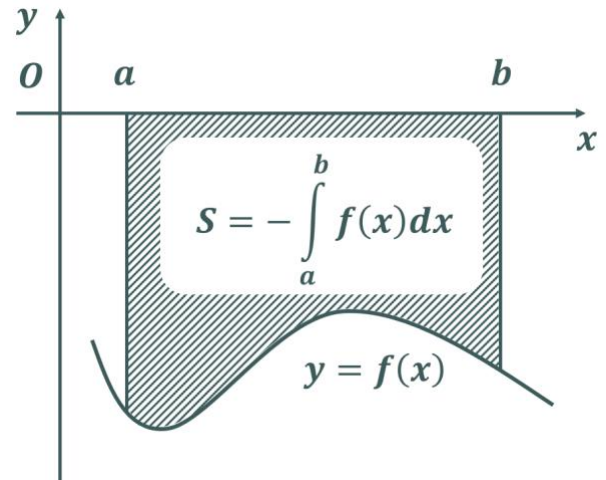
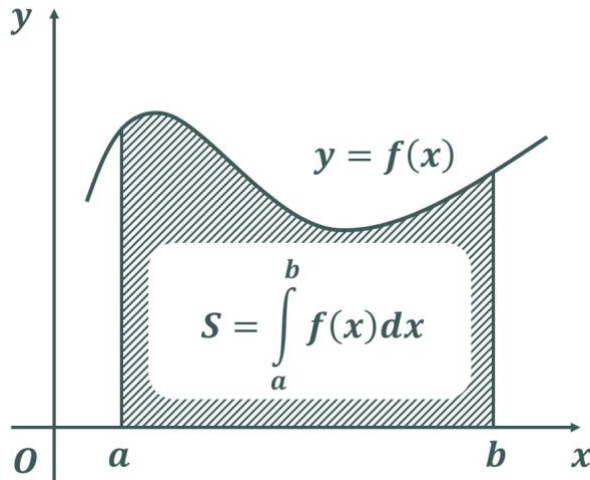


# Математика НОВА

## АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ, 11 КЛАС



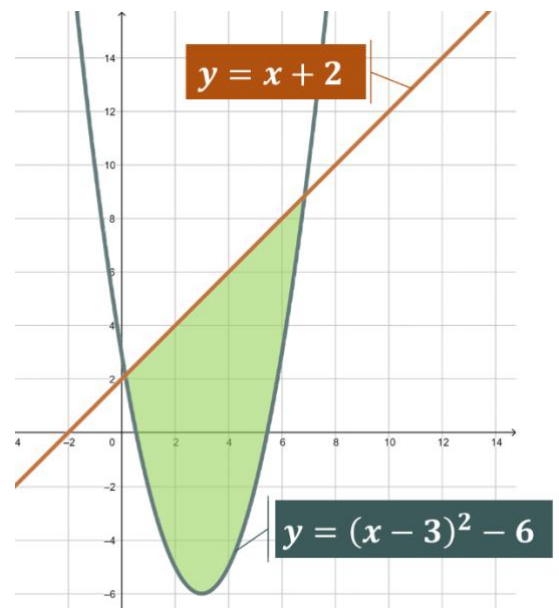
➤ Який можемо зробити висновок?

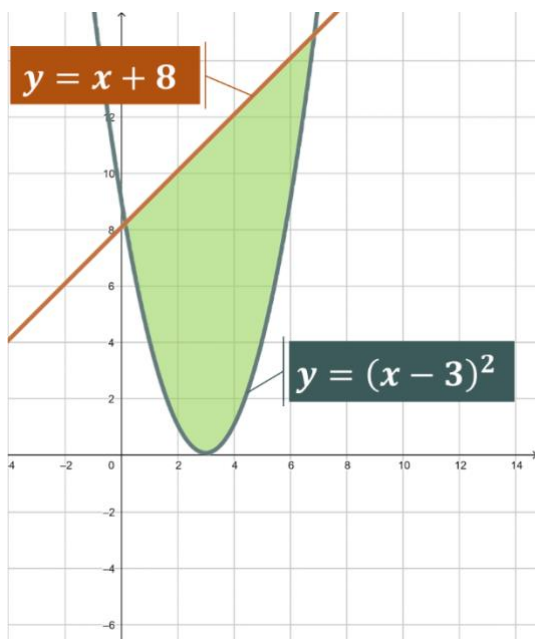
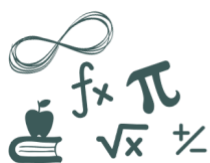


➤ Як знайти площу такої фігури?

$$S = -\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

➤ Як знайти площу такої фігури?  
(Учні висловлюють власні ідеї)





- Площа шуканої фігури знаходиться одночасно над віссю  $Ox$  та під нею, тому перенесемо площу шуканої фігури на необхідну нам кількість одиниць паралельно осі ординат.

За умовою очевидно, що графік функції  $y = (x - 3)^2 - 6$  опущено вниз на 6 одиниць, тому «підніmemo» нашу шукану площу фігури на 6 одиниці паралельно осі ординат.

Перенесена нами на 6 одиниць паралельно осі ординат площа шуканої фігури буде обмежена лініями  $y = (x - 3)^2$  та  $y = x + 8$ .

### III. Розв'язування задач

№1

Обчисліть визначений інтеграл:

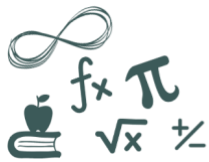
А)  $\int_2^3 \frac{dx}{x^2}$

Б)  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx$

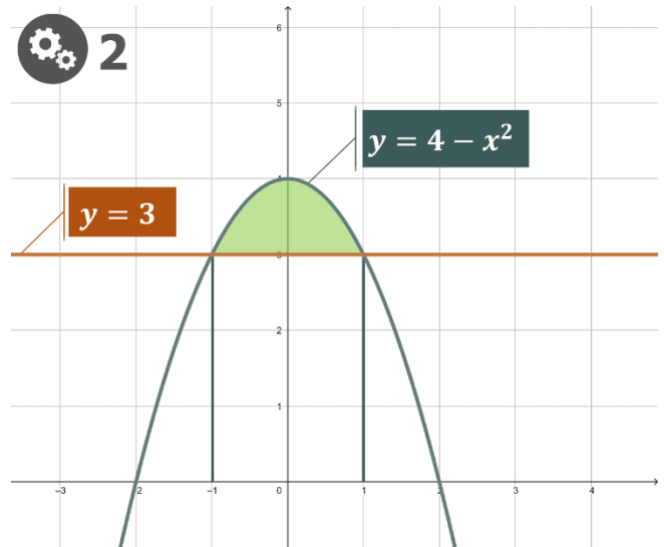
Розв'язок:

А)  $\int_2^3 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_2^3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Б)  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx = -2 \cos \frac{x}{2} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -2 \cos \frac{\pi}{4} + 2 \cos \frac{\pi}{6} = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 $= \sqrt{3} - \sqrt{2}$



Виконавши побудову, обчисліть площу фігури, обмеженої лініями:  
 $y = 4 - x^2$ ,  $y = 3$



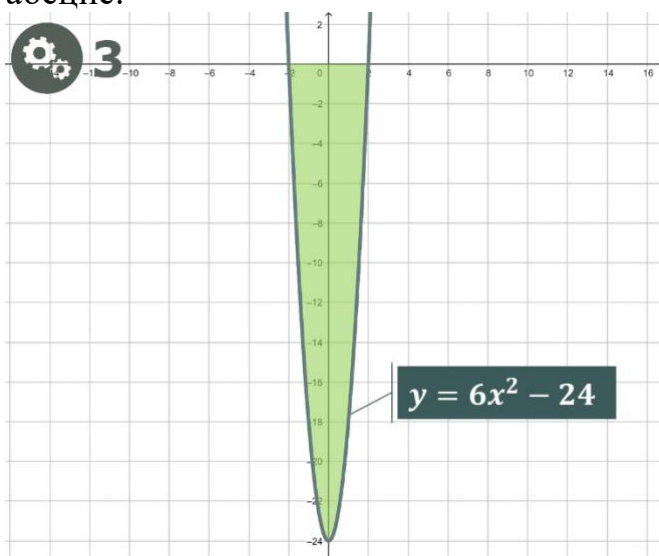
Розв'язок:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx - \int_{-1}^1 3 dx = \int_{-1}^1 (4 - x^2 - 3) dx = 4x - \frac{x^3}{3} - 3x \Big|_{-1}^1 \\ &= x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \left(1 - \frac{1^3}{3}\right) - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \\ &= 2 - \frac{2}{3} = \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

Відповідь:  $1\frac{1}{3}$  (кв. од.)

№3

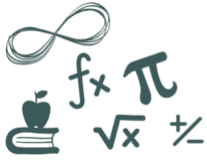
Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції  $y = 6x^2 - 24$  та віссю абсцис.



\*Площа шуканої фігури знаходиться під віссю абсцис, тому застосуємо наступну формулу:

$$S = - \int_a^b f(x) dx$$





Знайдемо точки перетину графіку функції  $y = 6x^2 - 24$  з віссю  $Ox$ :

$$6x^2 - 24 = 0$$

$$6(x^2 - 4) = 0$$

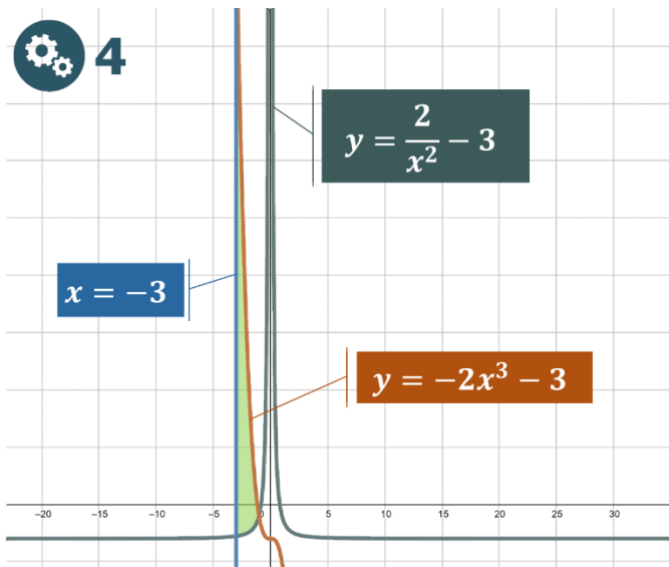
$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -2 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{(Межі інтегрування)} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} S &= - \int_{-2}^2 (6x^2 - 24) dx = - \left( \frac{6x^3}{3} - 24x \right) \Big|_{-2}^2 = -(2x^3 - 24x) \Big|_{-2}^2 \\ &= - \left( (2 \cdot 2^3 - 24 \cdot 2) - (2 \cdot (-2)^3 - 24 \cdot (-2)) \right) \\ &= -(-32 - 32) = 64 \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

Відповідь: 64 (кв. од.)

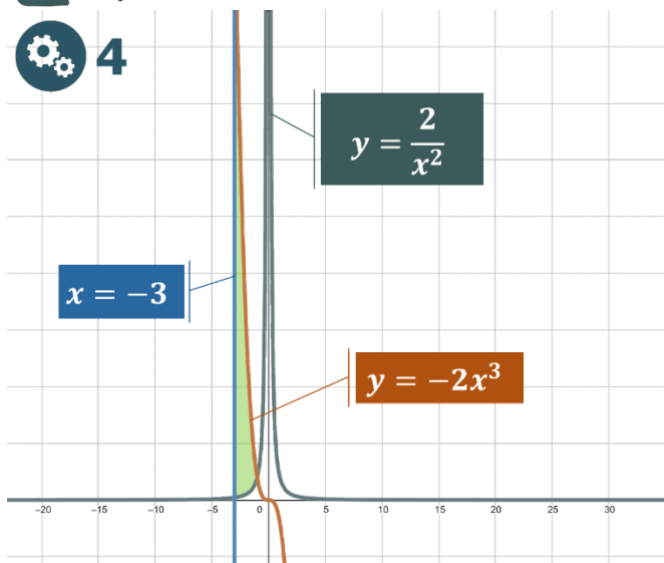
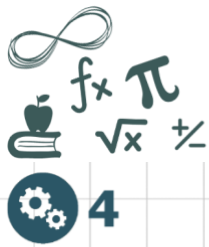
№4

Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій  $y = \frac{2}{x^2} - 3$ ,  $y = -2x^3 - 3$  та прямою  $x = -3$ .



\*Площа шуканої фігури знаходиться одночасно над віссю  $Ox$  та під нею, тому перенесемо площу шуканої фігури на необхідну нам кількість одиниць паралельно осі ординат.

- За умовою очевидно, що графіки функцій опущені вниз на 3 одиниці, тому піднінемо нашу шукану площу фігури на 3 одиниці паралельно осі ординат.



\*Перенесена нами на 3 одиниці паралельно осі ординат площа шуканої фігури буде обмежена лініями  $y = \frac{2}{x^2}$ ,  $y = -2x^3$  та прямою  $x = -3$

- Знайдемо точку перетину графіків функцій  $y = \frac{2}{x^2}$  та  $y = -2x^3$ :

$$\frac{2}{x^2} = -2x^3$$

$$2 = -2x^5$$

$$x^5 = -1$$

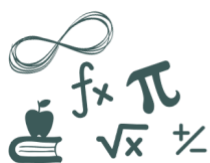
$$x = -1 \text{ (Верхня межа інтегрування)}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{-1} (-2x^3) dx - \int_{-3}^{-1} \frac{2}{x^2} dx = \int_{-3}^{-1} \left( -2x^3 - \frac{2}{x^2} \right) dx = -\frac{2x^4}{4} + \frac{2}{x} \Big|_{-3}^{-1} \\ &= \left( -\frac{2 \cdot (-1)^4}{4} + \frac{2}{(-1)} \right) - \left( -\frac{2 \cdot (-3)^4}{4} + \frac{2}{(-3)} \right) \\ &= -\frac{2}{4} - 2 + \frac{162}{4} + \frac{2}{3} = 38\frac{2}{3} \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

Відповідь:  $38\frac{2}{3}$  (кв. од.)

Самостійна робота





#### IV. Підсумок уроку

- Як можна обчислити площу криволінійної трапеції?
- Що ми називаємо визначеним інтегралом?
- Як обчислити визначений інтеграл?
- Чи можна виносити сталий множник за знак інтеграла?
- Яка формула виражає геометричний зміст визначеного інтеграла?

#### V. Домашнє завдання

Повторити §2 Виконати завдання № 4-6 протилежного варіанту самостійної роботи	Мерзляк А.Г.
Повторити §8-10 Виконати завдання № 4-6 протилежного варіанту самостійної роботи	Істер О.С.
Повторити §6-7 Виконати завдання № 4-6 протилежного варіанту самостійної роботи	Нелін Є.П.
Повторити §5-8 Виконати завдання № 4-6 протилежного варіанту самостійної роботи	Бевз Г.П.